第８講　確率(2)

1　１つのさいころを３回投げるとき，１回目に出た数を X，２回目に出た数を Y，３回目に出た数を Z とする．このとき，次の確率を求めよ．

(1)　$X=Y$ である確率　　(2)　$X<Y$ である確率

(3)　$X=Y=Z$ である確率　　(4)　$X<Y<Z$ である確率

【Point Pickup】

反復試行について(1)

同じ試行を繰り返すとき，ある事象が起こる「　　」が問題になっていない場合

→「　　　を通じて」何がどういう順で起こるかを考え，それを確率の分子とする．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　さいころを3回投げるとき，次の問いに答えよ．

(1)　すべて異なる目が出る確率を求めよ．

(2)　1の目がちょうど2回出る確率を求めよ．

[2]　原点を出発点として数直線上を動く点Pがある．さいころを1回投げて，5以上の目が出たときは点Pを正の向きに1だけ進め，4以下の目が出たときは負の向きに2だけ進める．9回投げるとき，点Pが3回目と9回目に原点の位置にくる確率を求めよ．

【Point Pickup】

反復試行について(2)

同じ試行を繰り返すとき，ある特定の事象が起こる「　　　　」が問題になっているとき

①　「　　　　」の試行におけるそれぞれの事象が起こる確率を求める．

②　起こる回数がわかっているので，出る順番を固定することで，「　　　　」にて確率が求められる．

③　条件に従い「　　　　　　　　　　で出たか」を求め，②とかけ算する．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　1枚の硬貨を繰り返し投げる．表と裏がともに2回以上出るまで投げ続ける試行をするとき，ちょうど n 回投げたときに試行が終わる確率を求めよ．ただし，n は4以上の自然数である．

[2]　ボタンを押すとX，Y，Zいずれかの文字が画面に表示される機械がある．その機械では，X，Yが表示される確率は等しく，その確率はZが表示される確率の2倍である．ボタンを5回続けて押すとき，X，Y，Zの文字が少なくとも1回表示される確率を求めよ．

【Point Pickup】

[1]「終了条件」について

終了する「　　　　の条件」 ＆　終了時の事象を考える．

[2]「少なくとも」「以上」「以下」について

「　　　　」を狙うのが基本．

必ずしもそれでうまくいくわけではない．「事象ごとに確率が異なる」ときなどに注意．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　確率(2)

[1]　6枚の白紙の札を横1列に並べ，左から順に1から6の番号をつける．1個のさいころを投げ，出た目の番号の札を裏返す（すでに裏だったときは表にする）という操作を繰り返す．

(1)　すべて表の状態から操作を2回行ったとき，裏の札が2枚になる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

(2)　すべて表の状態から操作を3回行ったとき，裏の札が1枚になる確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

[2]　1個のさいころを4回投げる試行において，出た目がすべて偶数で6の目が1回だけ出る確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$ である．また出た目が偶数で，かつ6の目が少なくとも1回出る確率は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コサシス}}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　確率(2)

1　１つのさいころを３回投げるとき，１回目に出た数を X，２回目に出た数を Y，３回目に出た数を Z とする．このとき，次の確率を求めよ．

(1)　$X=Y$ である確率　　(2)　$X<Y$ である確率

(3)　$X=Y=Z$ である確率　　(4)　$X<Y<Z$ である確率

(1)　$X=Y$ となるのは　$(X,\ Y)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$ の６通り

よって求める確率は　$\dfrac{6}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$

(2)　$X<Y$ となるのは，１から６までの数から異なる２つを選び，小さい順に X，Y とした場合で，その場合の数は ${}_6C_2=15$（通り）

よって求める確率は　$\dfrac{15}{6^2}=\mathbf{\dfrac{5}{12}}$

(3)　$X=Y=Z$ となるのは

$(X,\ Y,\ Z)=(1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3),\ (4,\ 4,\ 4),\ (5,\ 5,\ 5),\ (6,\ 6,\ 6)$ の６通り

よって求める確率は　$\dfrac{6}{6^3}=\mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(4)　$X<Y<Z$ となるのは，１から６までの数から異なる３つを選び，小さい順に X，Y，Z とした場合で，その場合の数は ${}_6C_3=20$（通り）

よって求める確率は　$\dfrac{20}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{54}}$

2　[1]　さいころを３回投げるとき，次の問いに答えよ．

(1)　すべて異なる目が出る確率を求めよ．

(2)　１の目がちょうど２回出る確率を求めよ．

(1)　３回の出目がすべて異なる確率は　$\dfrac{{}_6C_3\times 3!}{6^3}=\dfrac{{}_6P_3}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{9}}$

(2)　１回の試行で１の目が出る確率は　$\dfrac{1}{6}$，１以外の目が出る確率は　$\dfrac{5}{6}$

よって１の目がちょうど２回出る確率は　${}_3C_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^1=\mathbf{\dfrac{5}{72}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

> 2 ［2］　原点を出発点として数直線上を動く点Ｐがある．さいころを１回投げて，５以上の目が出たときは点Ｐを正の向きに１だけ進め，４以下の目が出たときは負の向きに２だけ進める．９回投げるとき，点Ｐが３回目と９回目に原点の位置にくる確率を求めよ．

点Ｐが正の向きに動くことを →，負の向きに動くことを ← と表す．

→ が起こる確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$　　← が起こる確率は　$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

３回の試行で点Ｐが原点にあるのは，→ が２回，← が１回起こるときで，

その確率は　${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=\dfrac{2}{9}$

さらに９回目に点Ｐが原点にあるのは，３回目の試行のあとの６回で → が４回，← が２回起こるときで，その確率は　${}_6\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{20}{243}$

よって求める確率は　$\dfrac{2}{9}\times\dfrac{20}{243}=\boldsymbol{\dfrac{40}{2187}}$

> 3 ［1］　１枚の硬貨を繰り返し投げる．表と裏がともに２回以上出るまで投げ続ける試行をするとき，ちょうど n 回投げたときに試行が終わる確率を求めよ．ただし，n は４以上の自然数である．

硬貨を投げる１回の試行において，表，裏が出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である．

ちょうど n 回（題意より $n\geqq 4$）で試行が終わるのは次のとき．

（i）　$n-1$ 回目までに表が１回のみ出て，n 回目に表が出る

（ii）　$n-1$ 回目までに裏が１回のみ出て，n 回目に裏が出る

（i）が起こる確率は　${}_{n-1}\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{n-1}{2^n}$　　（ii）が起こる確率は（i）と同じ

よって求める確率は　$\dfrac{n-1}{2^n}\times 2=\boldsymbol{\dfrac{n-1}{2^{n-1}}}$　（$n=4$ のときも成立）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［2］　ボタンを押すとX，Y，Zいずれかの文字が画面に表示される機械がある．その機械では，X，Yが表示される確率は等しく，その確率はZが表示される確率の2倍である．ボタンを5回続けて押すとき，X，Y，Zの文字が少なくとも1回表示される確率を求めよ．

Zが表示される確率をpとすると，条件より　$2p+2p+p=1$　よって　$p=\dfrac{1}{5}$

よって，X，Yが表示される確率は　$2p=\dfrac{2}{5}$，Zが表示される確率は　$p=\dfrac{1}{5}$である．

ボタンを5回押すとき，X，Y，Zの文字が少なくとも1回表示されるのは次のとき．

(i)　Xが3回，Yが1回，Zが1回のとき　$\dfrac{5!}{3!}(2p)^3\cdot 2p\cdot p=320p^5$

(ii)　Yが3回，Zが1回，Xが1回のとき　(i)同様　$320p^5$

(iii)　Zが3回，Xが1回，Yが1回のとき　$\dfrac{5!}{3!}p^3\cdot 2p\cdot 2p=80p^5$

(iv)　Xが2回，Yが2回，Zが1回のとき　$\dfrac{5!}{2!2!}(2p)^2(2p)^2p=480p^5$

(v)　Yが2回，Zが2回，Xが1回のとき　$\dfrac{5!}{2!2!}(2p)^2\cdot p^2\cdot 2p=240p^5$

(vi)　Zが2回，Xが2回，Yが1回のとき　(v)同様　$240p^5$

以上より求める確率は　$(320\times 2+80+480+240\times 2)p^5=1680p^5=1680\left(\dfrac{1}{5}\right)^5=\boldsymbol{\dfrac{336}{625}}$

(別解)

ボタンを5回押すとき

Xだけ表示される ……$\left(\dfrac{2}{5}\right)^5$

Yだけ表示される ……$\left(\dfrac{2}{5}\right)^5$

Zだけ表示される ……$\left(\dfrac{1}{5}\right)^5$

XとYだけ表示される ……$\left(\dfrac{4}{5}\right)^5-2\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^5$

YとZだけ表示される ……$\left(\dfrac{3}{5}\right)^5-\left(\dfrac{2}{5}\right)^5-\left(\dfrac{1}{5}\right)^5$

ZとXだけ表示される ……$\left(\dfrac{3}{5}\right)^5-\left(\dfrac{1}{5}\right)^5-\left(\dfrac{2}{5}\right)^5$

なので，上の和を1から引いて

$$1-\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^5+\left(\frac{2}{5}\right)^5+\left(\frac{1}{5}\right)^5+\left(\frac{4}{5}\right)^5+\left(\frac{3}{5}\right)^5+\left(\frac{3}{5}\right)^5-2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^5-\left(\frac{2}{5}\right)^5-\left(\frac{1}{5}\right)^5-\left(\frac{1}{5}\right)^5-\left(\frac{2}{5}\right)^5\right\}$$

$=\dfrac{336}{625}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　確率(2)

［1］　6枚の白紙の札を横1列に並べ，左から順に1から6の番号をつける．1個のさいころを投げ，出た目の番号の札を裏返す（すでに裏だったときは表にする）という操作を繰り返す．

(1)　すべて表の状態から操作を2回行ったとき，裏の札が2枚になる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

(2)　すべて表の状態から操作を3回行ったとき，裏の札が1枚になる確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

［2］　1個のさいころを4回投げる試行において，出た目がすべて偶数で，6の目が1回だけ出る確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$ である．また出た目が偶数で，かつ6の目が少なくとも1回出る確率は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コサシス}}$ である．

解答例

［1］(1)　2回の試行の出目は全部で 6^2 通り．

裏の札が2枚になるのは，異なる2つの目が出るときで，${}_6C_2\times 2!={}_6P_2$（通り）

よって，求める確率は $\dfrac{{}_6P_2}{6^2}=\dfrac{6\cdot 5}{6\cdot 6}=\mathbf{\dfrac{5}{6}}$

(2)　裏の札が1枚になるのは (i) 3回とも同じ目が出る (ii) 2種類の目が出る のいずれか．

(i)のときは6通り　(ii)のときは ${}_6C_2\times 2\times\dfrac{3!}{2!}=90$（通り）

よって，求める確率は $\dfrac{6+90}{6^3}=\mathbf{\dfrac{4}{9}}$

［2］　6の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$，6以外の偶数の目が出る確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

よって，出た目がすべて偶数で6の目が1回だけ出る確率は ${}_4C_1\left(\dfrac{1}{6}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\mathbf{\dfrac{2}{81}}$

また，出た目が偶数で，かつ6の目が少なくとも1回出ることの余事象は，

出た目がすべて偶数である場合から，4回とも6の目が出ない場合を除いた場合である．

よって，その確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^4-\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{81}=\mathbf{\dfrac{65}{1296}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。